RENTREE 2021

Félicitations, vous avez été accepté(e) en prépa BCPST à Janson de Sailly.
Pour préparer votre rentrée en Sup et selon les spécialités que vous avez suivies en terminale, nous vous conseillons de bien revoir le programme de Terminale et de Première. Cette année a en en effet été un peu spéciale, et nous vous proposons quelques exercices de révisions sur lesquels vous devez vous sentir à l'aise, pour être serein à la rentrée de Septembre.

D'autre part, nous attirons votre attention sur le fait que **la calculatrice est interdite** à certains écrits et oraux du concours Agro-Veto **en Mathématiques**. Elle sera donc interdite pendant la plupart des DS de mathématiques de l'année.

Tant en maths qu'en physique-chimie, il est important d'être à l'aise en *calculs*. Le calcul est un outil intermédiaire entre les premières lignes écrites qui ne sont que la traduction du problème, et la conclusion, c'est donc quelque chose de fondamental. Quelqu'un qui ne sait pas *calculer juste* a un sérieux handicap en classe préparatoire.

On ne peut s'améliorer en calcul qu'en en faisant, et certainement pas en se contentant de regarder les autres faire : ce n'est pas en regardant un champion de tennis jouer que vous apprendrez à jouer (presque) comme lui, mais bien en vous exerçant tous les jours ... Il faut arriver en septembre en étant bien au point sur cet aspect du programme du lycée.

Cette série d'exercices a été conçue dans ce but. Il n'y a pas de mode d'emploi type ; à chacun de voir son organisation : en faire un peu tous les jours dans des domaines variés reste l'idéal, sinon comptez une semaine à plein temps. Apprenez sérieusement les formules qui sont proposées, et vérifiez régulièrement que vous ne les avez pas oubliées.
Vous n'êtes pas obligé(e) de tout faire mais il faut vous sentir à l'aise dans chacun des item proposés.

Une *évaluation notée* sera prévue à la rentrée sur ces sujets.

Il se peut que certaines réponses soient erronées ; merci de les signaler à l'adresse amalet03@gmail.com ou jerome.dhote@orange.fr

Révisions de Terminale à Sup : exercices de calcul

1 Pour se faire la main...

Exercice 1. Calculer de deux façons

$$A=\left(-\frac{2}{3}-\frac{4}{5}+1\right)-\left(-\frac{4}{3}+\frac{2}{5}-2\right)+\left(-2+\frac{5}{3}\right)$$

- en calculant d'abord chaque parenthèse
- en supprimant les parenthèses et en regroupant les termes qui donnent un résultat simple

Réponse : voir page 13

Exercice 2. Supprimer les parenthèses et les crochets dans les expressions suivantes (*les réponses doivent être écrites sous forme ordonnée*) :

$A=((a-c)-(a-b))-((b-c)-(a+c))$

$B=(a-b+c)-(2a-3b-4c)+(b-a)$

$C=[12-(a-b+6)]-[15+(b-a-15)]$

Réponse : voir page 13

Exercice 3. Effectuer les opérations suivantes :

$A=\dfrac{\frac{1}{2}-\frac{2}{3}}{\frac{3}{4}-1}=\dfrac{2}{3}$ $\quad B=\dfrac{\frac{5}{6}+\frac{1}{3}}{1-\frac{4}{5}}=\dfrac{35}{6}$ $\quad C=\dfrac{-3+\frac{3}{4}-\frac{1}{3}}{5+\frac{2}{5}-\frac{2}{3}}=-\dfrac{155}{284}$

Réponse : voir page 13

Exercice 4. Développer et réduire les expressions suivantes :
$A=5(3a^2-4b^3)-[9(2a^2-b^3)-2(a^2-5b^3)]$
$B=3a^2(2b-1)-[2a^2(5b-3)-2b(3a^2+1)]$

Réponse : voir page 13

2 Racines carrées

Exercice 5. Exprimer sans racine carrée :

$\sqrt{(-5)^2}$ $\quad \sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}$
$\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}$ $\quad \sqrt{(3-a)^2}$ (selon les valeurs de a)

Réponse : voir page 13

Exercice 6. Ecrire aussi simplement que possible :

$a = (2\sqrt{5})^2$ $\quad$ $b = (2+\sqrt{5})^2$

$c = (3+\sqrt{7})^2 - (3-\sqrt{7})^2$ $\quad$ $d = (\sqrt{2\sqrt{3}})^4$

$e = (\frac{5-\sqrt{2}}{\sqrt{3}})^2$

$g = (\sqrt{2}+\sqrt{3})^2 + (\sqrt{2}-\sqrt{3})^2$ $\quad$ $h = \frac{5+2\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{5-2\sqrt{6}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

Réponse : voir page 13

Méthode : technique de la quantité conjuguée.
Pour rendre rationnel un dénominateur, on utilise l'identité

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

Ainsi : $\frac{1}{2+\sqrt{2}} = \frac{1}{2+\sqrt{2}}.\frac{2-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = \frac{2-\sqrt{2}}{4-2} = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$

Exercice 7. Rendre rationnels les dénominateurs des expressions suivantes :

$a = \frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ $\quad$ $b = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$

$c = \frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{2}}$ $\quad$ $d = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$

Réponse : voir page 13

3 Calculs de factorielles

Pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ on pose $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times (n-1) \times n$.Par convention $0! = 1$

Exercice 8. Simplifier $\frac{12!}{8!}$ $\quad$ $\frac{12!}{3!10!}$ $\quad$ $\frac{1}{9!} - \frac{1}{10!}$.

Réponse : voir page 13

Exercice 9. Pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et (a,b) deux réels strictement positifs, simplifier

$$A_n = \frac{(n+3)!}{(n+1)!} \qquad B_n = \frac{n+2}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} \qquad C_n = \frac{u_{n+1}}{u_n} \text{ où } u_n = \frac{a^n}{n!b^{2n}}$$

Indication : voir page 12
Réponse : voir page 13

Exercice 10. Factoriser les expressions suivantes :

$$A_n = \frac{1}{(n+1)!} - \frac{n^2+1}{n(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)(n-1)!}$$

$$B_n = \frac{1}{nn!} - \frac{1}{n(n+1)!} - \frac{1}{(n+2)!} - \frac{1}{(n+3)!}.$$

Réponse : voir page 13

4 Puissances

Pour x un réel (ou complexe) non nul et n un entier naturel non nul, par définition on a :

$$\boxed{x^n = \underbrace{x \times \cdots \times x}_{n \text{ fois}} \text{ et } x^0 = 1}$$

Règles de calcul : pour x, y **deux réels non nuls** et m, n deux entiers relatifs

$$x^m \times x^n = x^{m+n} \text{ et } (xy)^m = x^m \times y^m$$
$$\frac{1}{x^m} = x^{-m} \text{ et } \frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$$
$$(x^m)^n = x^{mn}$$

Règle d'écriture : lorsqu'on a un produit, on n'écrit pas $b\times2\times3\times a$ et encore moins $(b\times2)\times(a\times3)$, même au cours d'un calcul : on écrit directement $6ab$ en *respectant impérativement l'ordre alphabétique* des lettres.

Exercice 11. Calculer les expressions suivantes :

$A = (7xy)^3$ $\quad$ $A_1 = (3x^2y)^2$ $\quad$ $B = (2a^2b^3)^5$

$C = [(-\frac{a}{b})^3]^2 \times [(-b)^2]^3$

$D = xy \times (-\frac{2}{3})x^2 \times \frac{3}{4}y^2$ $\quad$ $E = (\frac{2}{7})a^2 \times (-\frac{3}{4})xy^3 \times (-\frac{2}{5})a^2x$

$F = (-\frac{3}{5})a^2.(\frac{2}{3})b^2x.(-x)^4$ $\quad$ $G = 4x^3.(-3y^2).(-\frac{5}{6})a^2x^2y^5$

Réponse : voir page 13

Pour x un réel **strictement positif** et α réel, par définition on pose :

$$\boxed{x^\alpha = \exp(\alpha \ln x) = e^{\alpha \ln x}}$$

Règles de calcul : pour x, y **deux réels strictement positifs** et α, β deux réels

$$x^\alpha \times x^\beta = x^{\alpha+\beta} \text{ et } (xy)^\alpha = x^\alpha \times y^\alpha$$
$$\frac{1}{x^\alpha} = x^{-\alpha} \text{ et } \frac{x^\alpha}{x^\beta} = x^{\alpha-\beta}$$
$$(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$$

Convention usuelle : « x^{α^β} » souffre d'un problème de parenthésage et pourrait désigner $(x^\alpha)^\beta$ et $x^{(\alpha^\beta)}$. Or les règles de calcul donnent $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$; donc on convient habituellement que la notation x^{α^β} désigne $x^{(\alpha^\beta)}$.

Exercice 12. Simplifier :

$A = \dfrac{4^{12}}{2^{25}}$; $\quad B = \dfrac{3}{2}\dfrac{2^n}{3^{n+1}}$; $\quad E = \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{3}{4}\right)^2$

$F = (-1)^3\left(-\dfrac{7}{8}\right)^3 \times \left(-\dfrac{2}{7}\right)^2 \times (-7) \times \left(-\dfrac{1}{14}\right)$

$G = 77^{-1} \times 7^4 \times 11^2 \times (7 \times 11)^4 \times (7^2)^{-8} \times (7^{-8})^{-3} \times \dfrac{1}{(-11)^{-3}}$

$K = (a^{n^2})^2$; $\quad L = \dfrac{a^{n^2}}{a^n}$; $\quad M = a^{3n}(a^n)^3$; $\quad P = (a^n)^n$

où a est un réel strictement positif et n un entier naturel non nul.

Réponse : voir page 13

Exercice 13. (**exercice fondamental**)

Exprimer en fonction de e^x les nombres suivants :
$A = \mathrm{e}^{kx}$ $\quad B = \mathrm{e}^{-x}$ $\quad C = \mathrm{e}^3\mathrm{e}^{3x-1}$ $\quad D = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{x+1}$ $\quad E = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}$
$F = \mathrm{e}^x + 2\mathrm{e}^{-x} + 3$

Réponse : voir page 13

5 Sommes et produits de polynômes

Les "polynômes" seront définis pendant l'année, mais vous avez déjà travaillé avec des expressions polynomiales, par exemple $x^2 - 3x + 1$ ou $x - 2x^3 + 1$.

Un polynôme doit impérativement être ordonné selon les puissances croissantes (ou décroissantes). Par exemple, on n'écrit jamais $x - 2x^3 + 1$, mais $-2x^3 + x + 1$.

Exercice 14. Réduire et ordonner les polynômes suivants :
$P(x) = 7x^3 + 8x - 3 + 4x - 2x^3 - 5x + 2$

$Q(x) = \dfrac{3}{2}x^2 + \dfrac{5}{4}x - 3x^2 + \dfrac{x}{6} - \dfrac{5}{2}x^2 + 5 + 4x^2$

$R(x) = \dfrac{3}{2}x^2 + xy + y^2 - 2xy + \dfrac{x^2}{3} - \dfrac{3}{2}x^2$

Réponse : voir page 13

Somme de polynômes

Méthode : on considère les polynômes :
$A = 2 - 5x + 4x^3 \qquad B = -8x + 4x^2 + 6 \qquad C = -2x^3 + 3 + x^2 + 2x$
Pour calculer la somme $A - B + C$, on recopie sur 3 lignes les polynômes ordonnés, en laissant de l'espace pour les puissances manquantes :

$$\begin{array}{rclllll} A & = & 4x^3 & & -5x & +2 & \\ -B & = & & -4x^2 & +8x & -6 & \text{puis on additionne par colonnes.} \\ C & = & -2x^3 & +x^2 & +2x & +3 & \end{array}$$

On trouve immédiatement $A - B + C = 2x^3 - 3x^2 + 5x - 1$

Exercice 15. Former les polynômes

$$A + B + C \quad A - B + C \quad A + B - C$$

avec $A = 3x^2 - 4x + 5 \quad B = 2x^2 + 4 - 5x \quad C = 3 - x + 4x^2$

Réponse : voir page 13

Produit de deux polynômes à une variable

Méthode : après avoir ordonné les polynômes, on peut disposer les calculs comme une multiplication d'entiers à l'école primaire, en réservant de l'espace pour les puissances manquantes.
Soient les polynômes $\quad A = 3x^3 - 2 + 5x \quad$ et $\quad B = 2x^2 - 4x + 3$.
Calculer le produit $A.B$

$$\begin{array}{r|llllll} A = & & & 3x^3 & & +5x & -2 \\ B = & & & & 2x^2 & -4x & +3 \\ \hline 3.A = & & & +9x^3 & & +15x & -6 \\ -4x.A = & & -12x^4 & & -20x^2 & +8x & \\ 2x^2.A = & 6x^5 & & +10x^3 & -4x^2 & & \\ \hline A.B = & 6x^5 & -12x^4 & +19x^3 & -24x^2 & +23x & -6 \end{array}$$

Exercice 16. Effectuer les produits suivants, réduire et ordonner les résultats :
$A = (4x^5 + 7 - 2x^3)(x^3 - 2x)$
$B = (5x^3 - 2x)(3x - 4x^2)$
$C = (7x^4 - 2x^3 + 4x^2)(3x^2 - 5)$

Réponse : voir page 13

6 Identités remarquables

Démontrer (et apprendre) les identités suivantes :
$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2bc+2ca+2ab$
$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
$(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$
$(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3+b^3$
$(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3-b^3$
$(x+a)(x+b) = x^2+(a+b)x+ab.$

Exercice 17. Démontrer que pour tous réels a, b, c on a les égalités :

$$(a+b)^2-(a-b)^2 = 4ab$$

$$\begin{aligned} a^3+b^3+c^3-3abc &= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab) \\ &= \frac{1}{2}(a+b+c)((b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2) \end{aligned}$$

Exercice 18. Factoriser

$A = x^2-2x+1$ $\quad B = x^2+x+\frac{1}{4}$
$C = 4x^2-4x+1$ $\quad D = a^2+4a+4$
$E = 4x^3+8x^2y+4xy^2$ $\quad F = (x+y)^3-x^3-y^3$
$G = (x-y)^3-x^3+y^3$

Réponse : voir page 13

Exercice 19. Compléter de façon à obtenir une expression de la forme $(T+U)^2$

$A = x^2+\cdots+16$ $\quad B = x^2-\cdots+9a^2$
$C = 4x^2-4x+\ldots$ $\quad D = 9x^2+6x+\ldots$
$E = x^2+\cdots+y^4$ $\quad F = 4a^2x^2-\cdots+1$

Réponse : voir page 13

Exercice 20. Simplifier les expressions suivantes, en admettant qu'elles sont définies :

$A = \dfrac{7a^2x^5}{2b^2x^4}$ $\quad B = \dfrac{-2a^3b^2x}{3a^3bx^3}$ $\quad C = \dfrac{10a^2x^3y^2}{-4a^4x^3y}$

$D = \dfrac{x^2}{x^2-x}$ $\quad E = \dfrac{x^2+x^3}{x^3-x}$ $\quad F = \dfrac{6x^2-4x}{9ax-6a}$

$G = \dfrac{ax+by}{a^2x^2-b^2y^2}$ $\quad H = \dfrac{x^3-9x}{3x^2-9x}$ $\quad I = \dfrac{x^2+2x+1}{x^2-1}$

Réponse : voir page 13

Exercice 21. Calculer les expressions suivantes, sans vous préoccuper de leur définition :

$A = \dfrac{x+1}{6}+2\dfrac{2x-1}{21}-\dfrac{3x+1}{14}$ $\quad B = \dfrac{x+2}{5}-\dfrac{4x+3}{15}-\dfrac{x+1}{3}$

$C = \dfrac{1}{a(a+1)}-\dfrac{1}{a(a-1)}+\dfrac{2a}{a^2-1}$ $\quad D = \dfrac{2}{2a+1}-\dfrac{1}{2a-1}+\dfrac{2}{4a^2-1}$

Réponse : voir page 13

Exercice 22. Simplifier les expressions suivantes, sans vous préoccuper de leur définition :

$A = \dfrac{x}{2}\times\dfrac{x+1}{6}\times\dfrac{4x}{x^2-1}$ $\quad B = \dfrac{x+3}{5}\dfrac{x+1}{x^2}\dfrac{x}{(x+1)(x+3)}$

$C = \dfrac{a-b}{a}\times\dfrac{a^2-ab}{5}\times\dfrac{3a}{a^2-b^2}$ $\quad D = \dfrac{1}{a^2-ab}\times\dfrac{4}{a^2}\times\dfrac{a^2-b^2}{5}$

$$E = \dfrac{\dfrac{x}{x-y}-\dfrac{y}{x+y}}{\dfrac{x}{x+y}+\dfrac{y}{x-y}}$$

Réponse : voir page 13

Exercice 23. Résoudre $\left(\dfrac{x+5}{2}\right)^2 \leqslant \dfrac{x^2+25}{2}$

Indication : voir page 12

Réponse : voir page 13

Exercice 24. Pour a, b réels et n un entier naturel non nul, factoriser

$A = 16a^2-8a+1$ $\quad B = a^4-4a^2b^2+4b^4$
$C = a^3+8+(a+2)(2a-5)$ $\quad D = a^2-4b^2$
$E = 4a^2+b^2-4ab$ $\quad F = (a+b)^2-4ab$

Réponse : voir page 13

Somme des termes d'une suite géométrique : pour q réel (ou complexe)

$$1+q+q^2+\cdots+q^n = \begin{cases} \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ n+1 & \text{si } q = 1 \end{cases}$$

Exercice 25. Calculer en fonction de n

$A_n = 1+3+9+\cdots+3^{2n}$
$B_n = -1+4-16\cdots+(-1)^{n-1}4^n$
$C_n = 1-a^2+a^4-a^6+\cdots+(-1)^na^{2n}$ $\quad (\star)$

Indication : voir page 12

Réponse : voir page 13

Exercice 26. Calculer $A_n = 9 + 27 + \cdots + 3^{n+2}$ (on factorisera par 3^2 pour se ramener à la formule encadrée). Calculer de même $B_n = a^2 + a^4 + \cdots + a^{2n}$ et $C_n = 3^{n+2} + 3^{n+3} + \cdots + 3^{2n+4}$.

Réponse : voir page 13

7 Logarithmes et exponentielles

Il n'est pas question de donner ici les constructions des fonctions exponentielle et logarithme, qui feront l'objet d'un chapitre de cours, mais seulement de rappeler les principales règles de calcul :

- La fonction ln est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et vérifie pour tous réels a et b **strictement positifs** :
  $$\ln(ab) = \ln a + \ln b \quad \text{et} \quad \ln 1 = 0$$
  d'où $\ln \dfrac{1}{a} = -\ln a$ et $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$.

Ecrire $\ln(xy) = \ln x + \ln y$ exige d'avoir $x > 0$ et $y > 0$.

- la fonction exp est définie sur $\mathbb{R}$ et vérifie $\boxed{\exp(a+b) = \exp a \exp b}$ pour tous réels a et b.
  On note usuellement $\boxed{\exp a = \mathrm{e}^a}$ où $\boxed{\ln \mathrm{e} = 1}$.

Enfin pour tout réel x **strictement positif** et pour tout entier relatif (et même tout réel) α on a

$$\boxed{\exp(\ln x) = x} \quad \text{et} \quad \boxed{\ln x^\alpha = \alpha \ln x}$$

Exercice 27. Calculer les nombres suivants

1. en fonction de $\ln 2$:
$$\ln 16 \quad \ln 512 \quad \ln 0.125 \quad \frac{1}{8}\ln\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\ln\frac{1}{8} \quad \ln 72 - 2\ln 3$$
2. en fonction de $\ln 2$ et $\ln 3$:
$$\ln 36 \quad \ln\frac{1}{12} \quad \ln 2.25 \quad \ln 21 + 2\ln 14 - 3\ln 0.875$$

Indication : voir page 12

Réponse : voir page 13

Exercice 28. Calculer $(1+\sqrt{2})^2$ et $\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$.

En déduire que $\dfrac{7}{16}\ln(3+2\sqrt{2}) - 4\ln(\sqrt{2}+1) = \dfrac{25}{8}\ln(\sqrt{2}-1)$

Indication : voir page 12

Exercice 29. Calculer y sachant que
$$\ln y = \ln(7+5\sqrt{2}) + 8\ln(\sqrt{2}+1) + 7\ln(\sqrt{2}-1)$$

Indication : voir page 12

Réponse : voir page 14

Exercice 30. Simplifier
$$A = \ln\left((2+\sqrt{3})^{20}\right) + \ln\left((2-\sqrt{3})^{20}\right) \qquad B = \ln\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right) + \ln\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$$

Réponse : voir page 14

Exercice 31. Simplifier les nombres suivants
$$\mathrm{e}^{3\ln 2} \qquad \ln(\sqrt{e}) \qquad \mathrm{e}^{-2\ln 3} \qquad \ln(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}})$$

Réponse : voir page 14

Exercice 32. Montrer que les fonctions suivantes sont impaires :
$$f : x \mapsto \ln\frac{2016+x}{2016-x} \qquad h : x \mapsto \frac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\mathrm{e}^{2x}+1}$$

On n'oubliera pas de vérifier que leur ensemble de définition est centré en 0 !

Exercice 33. Résoudre les équations suivantes :
$$\begin{array}{rlcl} (a) & \ln(-x-5) & = & \ln(x-61) - \ln(x+7) \\ (b) & \ln(-x-5) & = & \ln\dfrac{x-61}{x+7} \end{array}$$

Indication : voir page 12

Réponse : voir page 14

Exercice 34. Simplifier $a = \mathrm{e}^{\ln 3 - \ln 2}$ $\quad b = -\mathrm{e}^{-\ln\frac{1}{2}}$ $\quad c = \mathrm{e}^{-\ln\ln 2}$ $\quad d = \ln\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}^{17}}\right)$

Réponse : voir page 14

Exercice 35. Soit $f : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$.

Montrer que pour tous réels a et b on a $f(a+b) = \dfrac{f(a)+f(b)}{1+f(a)f(b)}$.
Questions subsidiaires : déterminer la parité de cette fonction et en calculer les limites en $+\infty$ et $-\infty$.

Réponse : voir page 14

Exercice 36. Simplifier pour x non nul l'expression $f(x) = x\mathrm{e}^{\frac{1}{2}|\ln(x^2)|}$

Indication : voir page 12

Réponse : voir page 14

Exercice 37. Résoudre les inéquations suivantes :
$$\begin{array}{llll} (1) & \mathrm{e}^{3x-5} \geqslant 12 & 1 \leqslant \mathrm{e}^{-x^2+x} & (2) \\ (3) & \mathrm{e}^{1+\ln x} \geqslant 2 & \mathrm{e}^{-6x} \leqslant \sqrt{\mathrm{e}} & (4) \end{array}$$

Réponse : voir page 14

8 Encadrements

Pour essayer de minimiser les erreurs de calcul, il est préférable de ne manipuler que des inégalités $<$ ou $\leqslant$.

On rappelle les règles usuelles de calcul sur les inégalités :

- addition membre à membre de deux inégalités de même sens ;
- multiplication par $\lambda > 0$ des deux membres d'une inégalité sans en changer le sens (c'est la croissance de l'application $x \mapsto \lambda x$), et renversement du sens de l'inégalité si $\lambda < 0$
- le passage à l'inverse renverse le sens d'une inégalité où les deux membres sont strictement positifs (c'est la décroissance de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^\star$)
- multiplication membre à membre de deux inégalités de même sens entre nombres strictement positifs.

Exercice 38. Encadrer $a+b$, ab et $\dfrac{a}{b}$ sachant que :

1. $3,2 < a < 3,3$ et $1,6 < b < 1,7$
2. $-3,3 < a < -3,2$ et $1,6 < b < 1,7$
3. $-3,3 < a < -3,2$ et $-1,7 < b < -1,6$

Réponse : voir page 14

Exercice 39. On se fixe $x \in \left]\dfrac{1}{2}; \dfrac{3}{2}\right[$.

Encadrer alors $f(x) = x^2$ $\quad g(x) = x^2+x+3$ $\quad h(x) = -x^2+x+1$ par deux méthodes différentes.

Indication : voir page 12

Exercice 40. Vérifier que $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + \dfrac{x^2}{1+x}$ pour tout réel x différent de -1.

En déduire que pour tout réel $x > -\dfrac{1}{2}$ on a : $\left|\dfrac{1}{1+x} - (1-x)\right| \leqslant 2x^2$

Exercice 41. On fixe deux entiers naturels a et b tels que $a \leqslant b$ et $b \neq 0$. Etablir que :

$$\frac{a}{b+1} \leqslant \frac{a}{b} \leqslant \frac{a+1}{b+1}$$

Indication : voir page 12

Réponse : voir page 14

Exercice 42. On fixe deux entiers naturels a et b supérieurs à 2 ; comparer les nombres rationnels :

$$\frac{a}{b} \qquad \frac{a+1}{b+1} \qquad \frac{a-1}{b-1}$$

Indication : voir page 12

Réponse : voir page 14

9 Trigonométrie

Avertissement au lecteur : toutes les formules de ce paragraphe sont à savoir sur le bout des doigts, et pas seulement à « savoir (prétendûment) retrouver ».

Là encore, pas question de faire ici un cours complet sur les fonctions trigonométriques cos, sin, tan, seulement de brefs rappels [1] :

- la fonction $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est 2π-périodique
  c'est-à-dire que pour tout réel x, $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$
  et impaire c'est-à-dire que pour tout réel x, $\sin(-x) = -\sin(x)$;
- la fonction $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est 2π-périodique et paire c'est-à-dire que pour tout réel x, $\cos(-x) = \cos(x)$;
- la fonction $\tan = \dfrac{\sin}{\cos}$ est définie sur $\mathbb{R}\backslash\left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}$; elle est π-périodique c'est-à-dire ? et impaire.

Première formule : $\boxed{\cos^2 + \sin^2 = 1}$

Exercice 43. Faire l'étude de la fonction $\tan = \dfrac{\sin}{\cos}$:
domaine de définition, parité, périodicité, limites aux bornes de l'ensemble de définition ; dérivabilité, exprimer sa dérivée de deux façons différentes ; tableau de variation et graphe.

Exprimer simplement $\tan\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$ pour tout réel $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right[$.

Réponse : voir page 14

Première série de formules (a est quelconque) [2] :

$\cos(-a) = \cos a$	$\sin(-a) = -\sin a$	$\tan(-a) = -\tan a$
$\cos(\pi - a) = -\cos a$	$\sin(\pi - a) = \sin a$	$\tan(\pi - a) = -\tan a$
$\cos(\pi + a) = -\cos a$	$\sin(\pi + a) = -\sin a$	$\tan(\pi + a) = \tan a$
$\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - a\right) = \sin a$	$\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - a\right) = \cos a$	$\tan\left(\dfrac{\pi}{2} - a\right) = \dfrac{1}{\tan a}$
$\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + a\right) = -\sin a$	$\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + a\right) = \cos a$	$\tan\left(\dfrac{\pi}{2} + a\right) = -\dfrac{1}{\tan a}$

Deuxième série de formules [3] :

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$	$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$	$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$
$\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$	$\tan(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$

Exercice 44. Démontrer les formules sur la tangente d'une somme.

Formules de duplication [4]

$$\begin{array}{|lcl|}\hline \cos(2a) & = & \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a \\ \sin(2a) & = & 2\cos a \sin a \\ \hline\end{array}$$

1. et une invitation très ferme à aller revoir vos cours de lycée sur la question
2. Formules à connaître par cœur et, pour les deux premières colonnes, à voir sur le cercle trigonométrique... vous trouverez sur internet
3. Formules à apprendre également...
4. Formules à apprendre également...

Valeurs remarquables [5]

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	X	0

X : non défini, attention !

Exercice 45. Résoudre les systèmes suivants :

$$(S_1)\left\{\begin{array}{c}\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \pi \leqslant x \leqslant 2\pi\end{array}\right. \qquad (S_2)\left\{\begin{array}{c}\cos x = -\frac{1}{2}\\ 0 \leqslant x \leqslant \pi\end{array}\right.$$

Réponse : voir page 14

Exercice 46. En remarquant que $\frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}$ calculer $\cos \frac{5\pi}{12}, \sin \frac{5\pi}{12}, \tan \frac{5\pi}{12}$.

Réponse : voir page 14

Exercice 47. Simplifier $\frac{\sin 2a}{\sin a} - \frac{\cos 2a}{\cos a}$.

Réponse : voir page 14

Exercice 48. Calculer $\sin(x + \frac{\pi}{4})$ en fonction de $\sin x$ et $\cos x$; en déduire la résolution des équations $\sin x + \cos x = 1$ puis $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$.

Réponse : voir page 14

Exercice 49. Calculer $\cos \frac{\pi}{8}$ en montrant qu'il est racine de l'équation $4x^2 = 2 + \sqrt{2}$.

Réponse : voir page 14

Exercice 50. Résoudre le système d'inconnue réelle $x \in [0, 2\pi]$ suivant : $\left\{\begin{array}{rcl} 2\cos x & \geqslant & 1\\ \tan x & \geqslant & 0\end{array}\right.$

Réponse : voir page 14

Exercice 51. Résoudre $16 \sin^4(x + \frac{\pi}{10}) \geqslant 1$ d'inconnue réelle $x \in [-\pi, \pi]$.

Réponse : voir page 14

5. Là encore, à apprendre et à placer sur un cercle trigonométrique.

10 Equations polynômiales du premier degré

Rappel :

Si a, b, c et d sont des nombres réels (ou complexes) et b et d ne sont pas nuls, alors $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ si et seulement si $ad = bc$

Exercice 52. Résoudre les équations suivantes

$$3x = 4 \ (1) \qquad \frac{4}{x-3} = 2 \ (2) \qquad \frac{2x+3}{x-5} = \frac{4}{3} \ (3) \qquad \frac{3}{x-\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}-x} \ (4)$$

Réponse : voir page 14

Exercice 53. Résoudre les équations suivantes :
$(a) 5(2x-3) - 4(5x-7) = 19 - 2(x+11)$; $\quad (b) 4(x+3) - 7x + 17 = 8(5x-3) + 166$

Réponse : voir page 14

Exercice 54. Résoudre les équations suivantes :

$(a)(x-1)(x-2)(x-3) = 0$ $\quad (b)x^2 - 3x = 0$

$(c) -\frac{3}{5}x^2 + x = 0$ $\quad (d)x^2 = 81$

$(e)9x^2 = 64$ $\quad (f)x(5x+1)(4x-3)(3x-4) = 0$

$(g)x(x+1) = x+1$ $\quad (h)(x+5)(4x-1) + x^2 - 25 = 0$

$(i)4x^2 - 49 = 0$ $\quad (j)(3x+1)(x-3)^2 = (3x+1)(2x-5)^2$

$(k)3x^3 - 12x = 0$ $\quad (l)\frac{5x-1}{3x+2} = \frac{5x-7}{3x-1}$

Réponse : voir page 14

11 Trinômes réels

Soit (a, b, c) trois réels avec $a \neq 0$.
L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet deux racines réelles si et seulement si son discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ est positif ou nul.
Dans ce cas ces racines valent $\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, la somme des racines vaut alors $S = -\frac{b}{a}$ et le produit vaut $P = \frac{c}{a}$.
Si le discriminant est nul, il y a alors une racine double qui vaut $-\frac{b}{2a}$.
Enfin, la fonction $x \mapsto ax^2 + bx + c$ est du signe de a sauf entre les racines s'il y en a.

Exercice 55. Démontrer les résultats ci-dessus, et faire les représentations graphiques correspondant aux différents cas.

Remarque : (essayer de) ne pas passer à côté d'éventuelles racines « évidentes » !

En effet, on a l'égalité : $(x-\alpha)(x-\beta) = x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta$.

Exemple d'utilisation : si l'équation $x^2 - 5x + 6 = 0$ admet deux solutions α et β, alors leur somme vaut 5 et leur produit 6.

Or $6 = 6 \times 1 = 3 \times 2$; et $6+1 = 7$ et $3+2 = 5$.

On obtient ainsi facilement et sans calcul l'égalité $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$: les solutions sont donc 2 et 3.

Exercice 56. Résoudre les équations suivantes :

$a) 8x^2 - 6x + 1 = 0$	$b) x^2 - 10x + 16 = 0$
$c) x^2 - (\sqrt{2} + \sqrt{8})x + 4 = 0$	$d) x^2 - (a+2)x + 2a = 0$
$e) x^2 + (1+\pi)x + \pi = 0$	$f) - x^2 + 8x + 6 = 0$
$g) 8x^2 + 6x + 1 = 0$	$h) - x^2 + 6x = 0$
$i) 3x^2 = 8$	$j) 169x^2 + 13x - 1 = 0$
$k) x^2 + 4ax + 3a^2 = 0$	$l) - 12x^2 + 125 = 0$
$m) - 6x^2 + 7x - 1 = 0$	

Indication : voir page 12

Réponse : voir page 14

Exercice 57. Après avoir précisé l'ensemble de définition, simplifier :

$$F_1(x) = \frac{x^2 + 5x + 4}{2x^2 - x - 3} \qquad F_2(x) = \frac{2x^2 + x - 6}{x^2 + 2x}$$

Réponse : voir page 14

Exercice 58. Calculer la seconde racine des équations suivantes

$3x^2 - 14x + 8 = 0$ sachant que $x = 4$ convient

$7x^2 + 23x + 6 = 0$ sachant que $x = -3$ convient

$mx^2 + (2m+1)x + 2 = 0$ sachant que $x = -2$ convient

$(m+3)x^2 - (m^2 + 5m)x + 2m^2 = 0$ sachant que $x = m$ convient

Indication : voir page 12

Réponse : voir page 14

Exercice 59. Résoudre les équations suivantes :

(1) $\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x-2} = \dfrac{7}{12}$ (2) $(3x-1)(2x+1) = 9x^2 - 1$

(3) $\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{1}{24}$ (4) $\dfrac{x^2 - x - 1}{x+2} = 2x + 3$

Indication : voir page 12

Réponse : voir page 15

Exercice 60. Résoudre **sans tableau de signes ni le moindre calcul** les inéquations suivantes

$$(1) \quad (3x-1)(x-5) < 0 \qquad (2) \quad (5-2x)(3+x) > 0 \qquad (3) \quad \frac{2x+1}{x-5} \leqslant 0$$

Indication : voir page 12

Réponse : voir page 15

Exercice 61. Résoudre les inéquations et systèmes d'inéquations suivante

a) $x^2 + 1 > 2x - 3$	b)$2x - 1 \leqslant x^2 + 4$
c) $\dfrac{1}{x-1} < \dfrac{3}{x-2}$	d)$\dfrac{4}{x} + \dfrac{1}{x-2} \geqslant 1$
e) $(x^2 - 5x + 4)(x^2 - 4x + 3) > 0$	f) $(x^2 - 5x + 4)(x^2 - 9x + 14) \leqslant 0$
g) $5 \leqslant x^2 - 14x + 50 \leqslant 26$	h)$0 \leqslant \dfrac{(x-3)^2}{(x+1)^2} < 1$

Indication : voir page 12

Réponse : voir page 15

Exercice 62. Résoudre l'équation $x^4 - 4x^2 - 5 = 0$.

Réponse : voir page 15

Exercice 63. Résoudre successivement les équations suivantes

$$(\ln x)^2 - \ln x - 42 = 0 \qquad (\ln x)^2 - \frac{42}{(\ln x)^2} = 1$$

Réponse : voir page 15

Exercice 64. Montrer que les inéquations $\dfrac{x+5}{x-5} < 0$ et $x^2 - 25 < 0$ ont le même ensemble de solutions. Les inéquations $\dfrac{x+5}{x-5} \leqslant 0$ et $x^2 - 25 \leqslant 0$ ont-elles le même ensemble de solutions ?

Réponse : voir page 15

Exercice 65. Résoudre les inéquations suivantes :

$2x^2 - 5x - 7 < 0$ (1)	$x^2 - 2x - 15 > 0$ (2)
$-4x^2 + 3x + 1 < 0$ (3)	$-x^2 - 8x + 9 \geqslant 0$ (4)
$\dfrac{(x-3)(x-1)}{2} + 5x \leqslant \dfrac{x^2}{3}$ (5)	$\dfrac{(x-1)^2}{2} < 3(x-1)$ (6)
$4x - 3 \geqslant x^2 - 2x + 6$ (7)	$(x-3)^2 > (x+5)^2$ (8)
$x^2 + 3x > 0$ (9)	$(2x-5)(x+1) > 0$ (10)
$(1-x)(x-7) \geqslant 0$ (11)	$(x-6)^2 < (x-10)(x-2)$ (12)
$\dfrac{2-3x}{x+2} \leqslant 0$ (13)	$\dfrac{2x-1}{x+m} \geqslant 0$ (14)

Indication : voir page 12

Réponse : voir page 15

12 Calculs de limites

Rappel.

Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$. Si f est une fonction bornée et si $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)g(x)=0$

Résultats : ces résultats à savoir par cœur permettent de lever des indéterminations

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$$

$$\lim_{x\to0} x\ln(x)=0$$

Exercice 66. Déterminer la limite en $+\infty$ des fonctions suivantes :

$a : x\mapsto e^{-\sqrt{x}}$ $\quad b : x\mapsto \dfrac{x+7}{4x+3}$ $\quad c : x\mapsto \dfrac{x^2+5}{x^3-1}$ $\quad d : x\mapsto \dfrac{\sin x}{x}$

$e : x\mapsto \cos(x^2)e^{-x}$ $\quad f : x\mapsto \dfrac{\ln(\ln x)}{\ln x}$ $\quad g : x\mapsto (2+\sin x)x$

Indication : voir page 12

Réponse : voir page 15

Une technique essentielle pour calculer une limite est de **mettre en facteur le terme prépondérant**.

Exemple. Déterminer la limite en $+\infty$ de $F(x)=\dfrac{x^5-4x^4+2x^2-30}{x^3+5x-4}$.

Au numérateur $\lim\limits_{x\to+\infty} x^5=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^4=+\infty$ etc. Mais de tous les termes du numérateur le terme prépondérant (c'est-à-dire celui qui croît le plus vite vers $+\infty$) est le terme en x^5. En faisant une remarque similaire pour le dénominateur, on est donc amené à écrire :

$F(x)=\dfrac{x^5(1-\frac{4}{x}+\frac{2}{x^3}-\frac{30}{x^5})}{x^3(1+\frac{5}{x^2}-\frac{4}{x^3})}$ d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=+\infty$

Exercice 67. Utiliser cette technique pour déterminer la limite en $+\infty$ des fonctions suivantes

- $g_1(x)=\dfrac{x+3}{2-x}$
- $g_2(x)=\dfrac{2x-1}{x^2-x+1}$
- $g_3(x)=\dfrac{x^2-3x+1}{-x^2+x-1}$
- $g_4(x)=\dfrac{x+\ln(x)}{2x-\ln(x)}$
- $g_5(x)=\dfrac{2e^x-x}{e^x+1}$

Indication : voir page 12

Réponse : voir page 15

Exercice 68. Déterminer la limite en $+\infty$ des fonctions suivantes :

- $f_1(x)=\dfrac{x^2+x^3+3\ln x+e^{-x}}{x^4+\cos x-1}$
- $f_2(x)=\dfrac{50x+x\ln x}{x\ln x+3}$
- $f_3(x)=\dfrac{e^{-x}+\sqrt{x}+e^x+\cos x}{x^{20}+2x^{2013}}$
- $f_4(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{\ln x}$
- $f_5(x)=\dfrac{e^x-1}{x^6+2e^x+e^{x/2}}$
- $f_6(x)=e^{-3\sqrt{x}+x-\ln(x^2+1)+\cos x}$
- $f_7(x)=\sqrt{x}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$
- $f_8(x)=\ln(e^{2x}+1)-2x$

Indication : voir page 12

Réponse : voir page 15

13 Dérivées

Pour u et v deux fonctions dérivables :

Fonction	Dérivée	Observations
$u+v$	$u'+v'$	
λu	$\lambda u'$	λ est un réel
uv	$uv'+u'v$	
u^n avec $n\in\mathbb{Z}$	$nu^{n-1}u'$	u ne s'annule pas si $n\in\mathbb{Z}_-$
$\dfrac{1}{u}$	$-\dfrac{u'}{u^2}$	u ne s'annule pas !
$\dfrac{u}{v}$	$\dfrac{vu'-uv'}{v^2}$	v ne s'annule pas !
$x\mapsto e^x$	$x\mapsto e^x$	
$\ln$	$x\mapsto\dfrac{1}{x}$	
$f\circ g=f(g)$	$f'\circ g\times g'$	bien justifier la dérivabilité de la composée...
$\ln\lvert f\rvert$	$\dfrac{f'}{f}$	f ne s'annule pas
u^α avec $\alpha\in\mathbb{R}^*$	$\alpha u^{\alpha-1}u'$	$u>0$
$\sqrt{\cdot}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{\cdot}}$	$\sqrt{\cdot}$ est définie sur $\mathbb{R}_+$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$
$\sin$	$\cos$	
$\cos$	$-\sin$	
$\tan$	$1+\tan^2=\dfrac{1}{\cos^2}$	

Exemple : dériver la fonction $F : x \mapsto \sqrt{x-1}$.

- la fonction $g : x \mapsto x - 1$ est définie et dérivable sur $]1, +\infty[$ et pour tout $x > 1$ on a $x - 1 > 0$.
- la fonction $f : y \mapsto \sqrt{y}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$

Donc $F : x \mapsto f(g(x))$ est dérivable sur $]1, +\infty[$ comme composée et pour $x \in]1, +\infty[$ on a

$$F'(x) = f'(g(x)) \times g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$$

Exercice 69. Justifier la dérivabilité et calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$$\begin{array}{lllll}
f : x \mapsto \dfrac{1}{x} & f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2} & f : x \mapsto \dfrac{1}{x^3} & f : x \mapsto \dfrac{1}{x^4} & \dots \\
f : x \mapsto \dfrac{1}{1-x} & f : x \mapsto \dfrac{1}{(1-x)^2} & f : x \mapsto \dfrac{1}{(1-x)^3} & f : x \mapsto \dfrac{1}{(1-x)^4} & \dots \\
f : x \mapsto \dfrac{1}{2x+1} & f : x \mapsto \dfrac{1}{(2x+1)^2} & f : x \mapsto \dfrac{1}{(2x+1)^3} & f : x \mapsto \dfrac{1}{(2x+1)^4} & \dots
\end{array}$$

etc. en utilisant la formule donnant la dérivée de u^α **et pas celle de la dérivée de** $\dfrac{1}{u}$.

Réponse : voir page 15

Exercice 70. Justifier la dérivabilité et calculer la dérivée des les fonctions suivantes ; mettre le résultat sous une forme propice à une éventuelle étude de signe

$f_1 : x \mapsto (x-1)^3$	$f_2 : x \mapsto (x^2-1)^3$	$f_3 : x \mapsto 3x^2 - 6x + 1$
$f_4 : x \mapsto (x-1)(x-2)$	$f_5 : x \mapsto \dfrac{x+1}{x+3}$	$f_6 : x \mapsto \dfrac{3-x}{2+x}$
$f_7 : x \mapsto \dfrac{3x+1}{1-x}$	$f_8 : x \mapsto 3x^2 - \dfrac{1}{x}$	$f_9 : x \mapsto (x-2)(3-x)(x-4)$
$g_1 : x \mapsto \dfrac{3x^2-2x+1}{-x+2}$	$g_2 : x \mapsto \dfrac{x^2-2x+3}{x^2-x+2}$	$g_3 : x \mapsto \sqrt{2x-3}$
$g_4 : x \mapsto \sqrt{x^2-2x+5}$	$g_5 : x \mapsto \sqrt{x^2+1}$	$g_6 : x \mapsto \dfrac{1}{-x+2}$
$g_7 : x \mapsto \cos(2x - \dfrac{\pi}{3})$	$g_8 : x \mapsto \sin(\dfrac{\pi}{6} - 2x)$	$g_9 : x \mapsto \sin 2x \cos x$
$h_1 : x \mapsto 6\cos^2 x - 6\cos x - 9$	$h_2 : x \mapsto \dfrac{\cos x}{1+\cos^2 x}$	$h_3 : x \mapsto 2\sin x \cos + \sin x + \cos x$
$h_4 : x \mapsto \dfrac{\sin x - x\cos x}{x \sin x + \cos x}$	$h_5 : x \mapsto \ln(5x-1)$	$h_6 : x \mapsto \ln(x^2+1)$
$h_7 : x \mapsto \ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$	$h_8 : x \mapsto \ln \ln x$	$h_9 : x \mapsto \ln\lvert 7-2x\rvert$
$u_1 : x \mapsto x\ln x - x$	$u_2 : x \mapsto \mathrm{e}^{3x}$	$u_3 : x \mapsto \mathrm{e}^{x^2-x+1}$
$u_4 : x \mapsto \mathrm{e}^{\sin x}$	$u_5 : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x+1}{\mathrm{e}^x-1}$	$u_6 : x \mapsto \mathrm{e}^{x\ln x}$
$u_7 : x \mapsto x\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$	$u_8 : x \mapsto \ln(\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x + 1)$	$u_9 : x \mapsto \dfrac{x}{1+\mathrm{e}^{-x}}$
$v_1 : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$	$v_2 : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}$	
$v_3 : x \mapsto \sqrt{\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}}$	$v_4 : x \mapsto \tan 2x$	

Réponse : voir page 15

14 Primitives

Pour u et v deux fonctions continues donc admettant des primitives U et V on a :

Fonction	Primitives	Observations
$u+v$	$U+V+\text{cte}$	
λu	$\lambda U+\text{cte}$	λ est un réel
$u^n u'$ avec $n\in\mathbb{Z}\setminus\{-1\}$	$\dfrac{1}{n+1}u^{n+1}+\text{cte}$	u ne s'annule pas si $n\in\mathbb{Z}_-$
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln\lvert u\rvert+\text{cte}$	cas précédent pour $n=-1$ u ne s'annule pas
$x\mapsto \mathrm{e}^x$	$x\mapsto \mathrm{e}^x+\text{cte}$	
$x\mapsto\dfrac{1}{x}$	$\ln+\text{cte}$	sur $\mathbb{R}_+^*$
$f'\circ g\times g'$	$f\circ g+\text{cte}$	
$\dfrac{f'}{f}$	$\ln\lvert f\rvert+\text{cte}$	f ne s'annule pas
$u^\alpha u'$ avec $\alpha\neq -1$	$\dfrac{1}{\alpha+1}u^{\alpha+1}+\text{cte}$	$u>0$
$\sin$	$-\cos+\text{cte}$	
$\cos$	$\sin+\text{cte}$	
$1+\tan^2=\dfrac{1}{\cos^2}$	$\tan+\text{cte}$	

où cte désigne une constante arbitraire réelle.

Exercice 71. Déterminer l'ensemble des primitives de $x\mapsto\dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_-^*$.

Indication : voir page 12

Réponse : voir page 15

Remarque : tous les calculs suivants relèvent d'une stricte application du formulaire ci-dessus .

Exercice 72. Calculer les primitives des fonctions suivantes, puis dériver le résultat obtenu pour contrôler la réponse.

$f : x\mapsto x^{16}-35x^{13}+14x^{11}-3x^8+20x^4+56x^3+51x^2+18x+1$

$f_1 : x\mapsto\dfrac{1}{x}$	$f_2 : x\mapsto\dfrac{1}{x^2}$	$f_3 : x\mapsto\dfrac{1}{x^3}$	$f_4 : x\mapsto\dfrac{1}{x^4}$
$g_1 : x\mapsto\dfrac{1}{1-x}$	$g_2 : x\mapsto\dfrac{1}{(1-x)^2}$	$g_3 : x\mapsto\dfrac{1}{(1-x)^3}$	$g_4 : x\mapsto\dfrac{1}{(1-x)^4}$
$h_1 : x\mapsto\dfrac{1}{2x+1}$	$h_2 : x\mapsto\dfrac{1}{(2x+1)^2}$	$h_3 : x\mapsto\dfrac{1}{(2x+1)^3}$	$h_4 : x\mapsto\dfrac{1}{(2x+1)^4}$

Réponse : voir page 15

Exercice 73. Calculer une primitive des fonctions suivantes puis dériver le résultat obtenu ... :

$a)x\mapsto 4x^2-5x+\dfrac{1}{x^2}$	$b)x\mapsto x(2x^2+1)^4$	$c)x\mapsto(x-1)^3$
$e)x\mapsto(x^2-1)^3$	$f)x\mapsto\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$g)x\mapsto\sqrt{x}+1$
$h)x\mapsto\sin 2x$	$i)x\mapsto\cos 3x$	$j)x\mapsto 1-\dfrac{1}{\cos^2 x}$
$k)x\mapsto\dfrac{x+1}{x^2+2x}$	$l)x\mapsto 2x(x^2-1)^5$	$m)x\mapsto\dfrac{x}{(x^2+2)^2}$
$n)x\mapsto\dfrac{1}{x-3}$	$o)x\mapsto\dfrac{2x+1}{(x^2+x+3)^2}$	$p)x\mapsto\dfrac{x^2}{x^3-1}$
$q)x\mapsto\mathrm{e}^{2x}$	$r)x\mapsto\dfrac{\mathrm{e}^x}{5\mathrm{e}^x+1}$	
$t)x\mapsto\tan x$	$u)x\mapsto x\mathrm{e}^{x^2}$	$v)x\mapsto\dfrac{\mathrm{e}^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$
	$y)x\mapsto\dfrac{1}{x^2\sqrt{x}}$	$z)x\mapsto-\sqrt{\mathrm{e}^x}$
$\alpha)x\mapsto\dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$	$\beta)x\mapsto\sin x\mathrm{e}^{\cos x}$	
$\delta)x\mapsto\dfrac{\mathrm{e}^x}{(1+2\mathrm{e}^x)^{\frac{3}{2}}}$	$\varepsilon)x\mapsto\dfrac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}$	

Indication : voir page 12

Réponse : voir page 15

Exercice 74. Calculer les intégrales suivantes

$$I_1=\int_{10}^{20}\frac{dv}{v}\qquad I_2=\int_0^1\mathrm{e}^{-2t}dt\qquad I_3=\int_{10^{-5}}^{10^{-2}}\frac{dp}{2p}\qquad I_4=\int_{275}^{315}\frac{2dT}{T}\qquad I_5=\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}A\cos(\omega t+\varphi)dt$$

Réponse : voir page 16

Indication de l'**exercice 9** : pour C_n : rappels de cours sur les puissances dans le paragraphe 4.

Indication de l'**exercice 23** : développer puis factoriser...

Indication de l'**exercice 25** : identifier soigneusement la raison avant d'appliquer une formule :

- calculer $-B_n$
- pour C_n, la raison se voit

Indication de l'**exercice 27** : $0.125 = 2^{\cdots}$

Indication de l'**exercice 28** : ne pas oublier la « quantité conjuguée », et tout exprimer en fonction de $\ln(1+\sqrt{2})$.

Indication de l'**exercice 29** : se reporter à l'exercice ci-dessus pour simplifier la somme.

Indication de l'**exercice 33** : attention à l'ensemble de définition de ces deux équations...

Indication de l'**exercice 36** : il y a quatre cas à envisager, suivant le signe de x et celui de $\ln|x|$

Indication de l'**exercice 39** : On utilisera d'abord les règles de calcul usuelles sur les inégalités ; puis on pourra étudier rapidement les fonctions f, g, h pour conclure.

Indication de l'**exercice 41** : Inutile de calculer les différences...

Indication de l'**exercice 42** : On supposera $a < b$, puis $a > b$, puis $a = b$

Indication de l'**exercice 56** : Pour les équations $b)c)d)e)h)k)$ chercher d'abord des racines évidentes en utilisant la somme et le produit...

Indication de l'**exercice 58** : Inutile de calculer le discriminant, utiliser plutôt les relations entre coefficients et racines. D'autre part, faire attention aux valeurs particulières de m.

Indication de l'**exercice 59** : Pas besoin de discriminant pour les équations $(2), (3), (4)$

Indication de l'**exercice 60** : Ne pas hésiter à tracer l'allure du graphe des deux premières fonctions ...

Indication de l'**exercice 61** :

- pour c) etc. : réduire au même dénominateur ;
- pour g) : on a en fait à traiter un système de deux inéquations

Indication de l'**exercice 65** : pour (6) et (8), surtout ne pas développer ! Pour (7) et (9), pas de Δ. Pour (10),(11), on dispose déjà des racines. Ne pas oublier de discuter en fonction de m pour (14).

Indication de l'**exercice 66** :

- pour a, comparer x et $\sqrt{x}$ au voisinage de $+\infty$
- pour b, c factoriser numérateur et dénominateur
- pour d, e utiliser le résultat encadré
- pour f penser à la limite d'une composée...
- pour g minorer...

Indication de l'**exercice 67** : Factoriser par

- x et x
- x^2 et x^2
- e^x et e^x

Indication de l'**exercice 68** : Factoriser par

- x^3 et x^4 pour f_1
- $x \ln x$ pour f_2
- e^x et x^{2013} pour f_3
- écrire $\ln(1+x) = \ln(x) + \ln(1+\frac{1}{x})$
- factoriser par e^x pour f_5
- déterminer la limite de « ce qui est dans l'exponentielle »puis conclure en utilisant la limite d'une composée
- quantité conjuguée...
- factoriser e^{2x} dans le logarithme

Indication de l'**exercice 71** : Ne pas chercher midi à quatorze heures...

Indication de l'**exercice 73** : b)c)l)m)o)s)δ) : déterminer une constante λ telle que la fonction à intégrer soit de la forme $\lambda u' u^{\cdots}$
g) : $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

k)déterminer une constante λ telle que la fonction à intégrer soit de la forme $\lambda \frac{u'}{u}$

u)v) : de la forme $u' e^u$

Réponse de l'**exercice 1** :
$A = \dfrac{32}{15}$

Réponse de l'**exercice 2** : $A = a + c; B = -2a + 3b + 5c; C = 6$

Réponse de l'**exercice 3** : $A = \dfrac{2}{3}; B = \dfrac{35}{6}; C = -\dfrac{155}{284}$

Réponse de l'**exercice 4** : $A = -21b^3 - a^2; B = 2a^2b + 3a^2 + 2b$

Réponse de l'**exercice 5** : $5; \sqrt{3} - 1; 2 - \sqrt{3}; |3 - a|$

Réponse de l'**exercice 6** : $a = 20; b = 9 + 4\sqrt{5}; c = 12\sqrt{7}; d = 12; e = 9 - \dfrac{10\sqrt{2}}{3}; g = 10; h = 2\sqrt{2}$

Réponse de l'**exercice 7** :

$$a = -(\sqrt{2} + \sqrt{3}) \qquad b = -\frac{1}{2}(3 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6})$$
$$c = \frac{1}{2}(4 - 2\sqrt{2} - 2\sqrt{3} + \sqrt{6}) \qquad d = 3 - 2\sqrt{2}$$

Réponse de l'**exercice 8** :
$12 \times 11 \times 10 \times 9$; 22 ; $\dfrac{1}{8!10}$

Réponse de l'**exercice 9** :
$12 \times 11 \times 10 \times 9$;22;\$$\dfrac{1}{8!10!}$;$A = (n+2)(n+3) \qquad B = \dfrac{1}{(n+1)!} \qquad C_n = \dfrac{1}{n+1}\dfrac{a}{b^2}$

Réponse de l'**exercice 10** :

$$A_n = \frac{n-1}{n(n+1)!} \qquad B_n = \frac{n^2 + 4n + 2}{(n+3)!}$$

Réponse de l'**exercice 11** : $A = 343x^3y^3$; $A_1 = 9x^4y^2$ $B = 32a^{10}b^{15}$; $C = a^6$; $D = -\dfrac{1}{2}x^3y^3$; $E = \dfrac{3}{35}a^4x^2y^3$; $F = -\dfrac{2}{5}a^2b^2x^5$; $G = 10a^2x^5y^7$

Réponse de l'**exercice 12** :
$A = \dfrac{1}{2} \quad B = \dfrac{2^{n-1}}{3^n} \quad E = \dfrac{3}{2^3} \quad F = \dfrac{7}{2^8} \quad G = -7^{15} \times 11^8$
$K = a^{2n^2} \quad L = a^{n^2-n} \quad M = a^{6n} \quad P = a^{n^2}$

Réponse de l'**exercice 13** :
$A = (\mathrm{e}^x)^k \quad B = \dfrac{1}{\mathrm{e}^x} \quad C = \mathrm{e}^2 \times (\mathrm{e}^x)^3 \quad D = (1 - \mathrm{e})\mathrm{e}^x$
$E = \mathrm{e}^x + \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$; $F = \dfrac{(\mathrm{e}^x)^2 + 3\mathrm{e}^x + 2}{\mathrm{e}^x} = \dfrac{(\mathrm{e}^x + 1)(\mathrm{e}^x + 2)}{\mathrm{e}^x}$

Réponse de l'**exercice 14** : $P(x) = 5x^3 + 7x - 1$
$Q(x) = 17/12x + 5$
$R(x) = \dfrac{1}{3}x^2 - xy + y^2$

Réponse de l'**exercice 15** :
$A + B + C = 9x^2 - 10x + 12 \qquad A - B + C = 5x^2 + 4$
$A + B - C = x^2 - 8x + 6$

Réponse de l'**exercice 16** :
$A = 4x^8 - 10x^6 + 4x^4 + 7x^3 - 14x \qquad B - 20x^5 + 15x^4 + 8x^3 - 6x^2$
$C = 21x^6 - 6x^5 - 23x^4 + 10x^3 - 20x^2$

Réponse de l'**exercice 18** :
$A = (x-1)^2 \qquad B = (x + \dfrac{1}{2})^2 \qquad C = (2x-1)^2 \qquad D = (a+2)^2$
$E = 4x(x+y)^2 \qquad F = 3xy(x+y) \qquad G = 3xy(-x+y)$

Réponse de l'**exercice 19** :
$A = x^2 + 8x + 16 = (x+4)^2 \qquad B = x^2 - 6ax + 9a^2 = (x - 3a)^2$
$C = 4x^2 - 4x + 1 = (2x-1)^2 \qquad D = 9x^2 + 6x + 1 = (3x+1)^2$
$E = x^2 + 2xy^2 + y^4 = (x + y^2)^2 \qquad F = 4a^2x^2 - 4ax + 1 = (2ax - 1)^2$

Réponse de l'**exercice 20** :
$A = \dfrac{7}{2}\dfrac{a^2x}{b^2} \qquad B = -\dfrac{2}{3}\dfrac{b}{x^2} \qquad C = -\dfrac{5}{2}\dfrac{y}{a^2}$
$D = \dfrac{x}{x-1} \qquad E = \dfrac{x}{x-1}$
$F = \dfrac{2x}{3a}$
$G = \dfrac{1}{ax - by} \qquad H = \dfrac{1}{3}(x+3) \qquad I = \dfrac{x+1}{x-1}$

Réponse de l'**exercice 21** :
$A = 1/7x$ $B = -2/5x - 2/15$ $C = \dfrac{2}{a}$ $D = \dfrac{1}{2a+1}$

Réponse de l'**exercice 22** :
$A = \dfrac{x^2}{3(x-1)} \qquad B = \dfrac{1}{5x} \qquad C = \dfrac{3}{5}a\dfrac{a-b}{a+b}$
$D = \dfrac{4}{5}\dfrac{a+b}{a^3} \qquad E = 1$

Réponse de l'**exercice 23** :
Toujours vrai ! On obtient en effet $(x-5)^2 \geqslant 0$

Réponse de l'**exercice 24** :
$A = (4a-1)^2 \qquad B = (a^2 - 2b^2)^2$
$C = (a-1)(a+2)(a+1) \qquad D = (a-2b)(a+2b)$
$E = (2a - b)^2 \qquad F = (a-b)^2$

Réponse de l'**exercice 25** :
$A_n = \dfrac{3^{2n+1} - 1}{2} \qquad B_n = \dfrac{(-4)^{n+1} - 1}{5}$
$C_n = \dfrac{1 + (-1)^n a^{2n+2}}{1 + a^2}$

Réponse de l'**exercice 26** :
$A_n = \dfrac{9}{2}(3^{n+1} - 1) \qquad C_n = \dfrac{3^{n+2}(3^{n+3} - 1)}{2}$
$B_n = a^2\dfrac{a^{2n} - 1}{a^2 - 1}$ si $a \neq 1$, n si $a = 1$

Réponse de l'**exercice 27** :

1. $4\ln 2 \quad 9\ln 2 \quad -3\ln 2 \quad \frac{1}{2}\ln 2 \quad 3\ln 2$
2. $2\ln 2+2\ln 3 \quad -\ln 3-2\ln 2 \quad 2\ln 3-2\ln 2 \quad \ln 3+11\ln 2$

Réponse de l'**exercice 29** : on trouve $y=17+12\sqrt{2}$

Réponse de l'**exercice 30** : $A=B=0$

Réponse de l'**exercice 31** :
$8 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{9} \quad -\frac{1}{2}$

Réponse de l'**exercice 33** : dans les deux cas, si x est solution de l'équation considérée, alors x vérifie $x^2+13x-26=0$. Ce trinôme admet deux racines réelles : $x_1=\frac{-13-\sqrt{273}}{2}$ et $x_2=\frac{-13+\sqrt{273}}{2}$. Or $-x_1-5>0$ et $-x_2-5<0$, donc le premier membre de ces deux équations n'est pas défini en x_2 et x_1 est la seule solution possible pour les deux équations. Pour le second membre, on a : $\frac{x_1-61}{x_1+7}>0$ mais $x_1-61<0$ donc la première équation n'admet aucune solution et la seconde en admet une seule, à savoir x_1.

Réponse de l'**exercice 34** :
$a=\frac{3}{2} \quad b=-2 \quad c=\frac{1}{\ln 2} \quad d=-17$

Réponse de l'**exercice 35** :
la fonction est impaire ; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1$

Réponse de l'**exercice 36** :
on trouve : $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si } x>1 \\ 1 & \text{si } 0<x<1 \\ -1 & \text{si } -1<x<0 \\ -x^2 & \text{si } x<-1 \end{cases}$

Réponse de l'**exercice 37** :
(1) $x \geqslant \frac{\ln 12+5}{3}$ $\quad x\in[0,1]$ (2)
(3) $x \geqslant \frac{2}{e}$ $\quad x\geqslant -\frac{1}{12}$ (4)

Réponse de l'**exercice 38** :
1. $4,8<a+b<5 \quad 5,12<ab<5,61 \quad \frac{3,2}{1,7}<\frac{a}{b}<\frac{3,3}{1,6}$
2. $-1,7<a+b<-1,5 \quad -5,61<ab<-5,12 \quad -\frac{3,3}{1,6}<\frac{a}{b}<-\frac{3,2}{1,7}$
3. $-5<a+b<-4,8 \quad 5,12<ab<5,61 \quad \frac{3,2}{1,7}<\frac{a}{b}<\frac{3,3}{1,6}$

Réponse de l'**exercice 41** : $0<b\leqslant b+1$ donc $\frac{1}{b+1}\leqslant\frac{1}{b}$ etc.

Réponse de l'**exercice 42** : Si $a<b$ alors $\frac{a-1}{b-1}<\frac{a}{b}<\frac{a+1}{b+1}$.

Réponse de l'**exercice 43** : la fonction tan est définie sur $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi ; k\in\mathbb{Z}\right\}$; elle est π-périodique et impaire, strictement croissante sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, de limite $-\infty$ et $+\infty$ aux bornes de cet intervalle.

Réponse de l'**exercice 45** :
$(S_1) x=\frac{5\pi}{4}$ ou $x=\frac{7\pi}{4}$ $(S_2) x=\frac{2\pi}{3}$

Réponse de l'**exercice 46** :
$\cos\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1) \quad \sin\frac{5\pi}{12}=\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1) \quad \tan\frac{5\pi}{12}=\sqrt{3}+2$

Réponse de l'**exercice 47** :
$\frac{\sin 2a}{\sin a}-\frac{\cos 2a}{\cos a}=\frac{1}{\cos a}$ pour $a\notin\left\{k\frac{\pi}{2} ; k\in\mathbb{Z}\right\}$

Réponse de l'**exercice 48** :
$\sin x+\cos x=1 \iff \sin(x+\frac{\pi}{4})=\sin\frac{\pi}{4}$,
d'où les solutions $\mathcal{S}=\{2k\pi ; k\in\mathbb{Z}\}\cup\left\{\frac{\pi}{2}+2k\pi ; k\in\mathbb{Z}\right\}$.
Pour la seconde équation, on trouve $\mathcal{S}=\left\{\frac{\pi}{4}+2k\pi ; k\in\mathbb{Z}\right\}$

Réponse de l'**exercice 49** : Comme $\forall x\in\mathbb{R}, \cos(2x)=2\cos^2(x)-1$, on obtient $\forall x\in\mathbb{R}, \cos^2(x)=\frac{\cos(2x)+1}{2}$ et donc $2\cos^2(\pi/8)=\cos(\pi/4)+1=\sqrt{2}/2+1$. Ainsi $4\cos^2(\pi/8)=\sqrt{2}+2$. On résout cette équation et on trouve deux solutions qui sont $\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{2}}}$ et $-\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{2}}}$, or $\cos(\pi/8)\geqslant 0$ donc $\cos(\pi/8)=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{2}}}$.

Réponse de l'**exercice 50** : $[0,\pi/3]$

Réponse de l'**exercice 51** : $[\pi/15, 11\pi/15]\cup[-14\pi/15,-4\pi/15]$

Réponse de l'**exercice 52** :

$$x=\frac{4}{3}\ (1) \qquad x=5\ (2) \qquad x=-\frac{29}{2}(3) \qquad x=\frac{3\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{5}\ (4)$$

Réponse de l'**exercice 53** : $(a)2 ; (b)-113/43$;

Réponse de l'**exercice 54** : $(a)\{1,2,3\} ; (b)\{0,3\} ; (c)\{0,5/3\} ; (d)\{-9,9\}$;
$(e)\{-8/3,8/3\} ; (f)\{0,3/4,4/3,-1/5\} ; (g)\{-1,1\} ; (h)\{-5,6/5\}$;
$(i)\{7/2,-7/2\} ; (j)\{-1/3,8/3,2\} ; (k)\{0,2,-2\} ; (l)\{-5\}$

Réponse de l'**exercice 56** :

$a)\frac{1}{4},\frac{1}{2}$	$b)8,2$
$c)\sqrt{2},\sqrt{8}$	$d)a,2$
$e)-1,-\pi$	$f)4\pm\sqrt{22}$
$g)-\frac{1}{4},-\frac{1}{2}$	$i)x=\pm 2\sqrt{\frac{2}{3}}$
$h)0,6$	$j)\frac{-1\pm\sqrt{5}}{26}$
$k)-3a,-a$	$l)x=\pm\frac{5}{2}\sqrt{\frac{5}{3}}$
$m)\frac{1}{6},1$	

Attention ! Pas de calcul de discriminant pour h), i) et l) !

Réponse de l'**exercice 57** : $F_1(x)=\frac{x+4}{2x-3} ; F_2(x)=\frac{2x-3}{x}$

Réponse de l'**exercice 58** : $\frac{2}{3}$ $\quad -\frac{2}{7}$
Attention, si $m=0$, ce n'est pas une équation du second degré ! Si $m \neq 0$ alors l'autre racine est $-\frac{1}{m}$
Si $m \neq -3$ alors on trouve $\frac{2m}{m+3}$

Réponse de l'**exercice 59** :
(1) $\frac{10}{7}, 5$ $\quad$ (2) $0, \frac{1}{3}$
(3) $x = \pm 7$ $\quad$ (4) $-1, -7$

Réponse de l'**exercice 60** :

$$(1) \quad x \in \left]\frac{1}{3}; 5\right[\qquad (2) \quad x \in \left]-3; \frac{5}{2}\right[\qquad (3) \quad x \in \left[-\frac{1}{2}; 5\right[$$

Réponse de l'**exercice 61** :
a) toujours vrai $\quad$ b)toujours vrai
c) $\left]\frac{1}{2}, 1\right[\cup]2, +\infty[$ $\quad$ d) $\left]0, \frac{7-\sqrt{17}}{2}\right[\cup \left]2, +\frac{7+\sqrt{17}}{2}\right[$
e) $]-\infty, 1[\cup]1, 3[\cup]4, +\infty[$ $\quad$ f) $[1,2] \cup [4,7]$
g) $[2,5] \cup [9,12]$ $\quad$ h)$]1, +\infty[$

Réponse de l'**exercice 62** : On trouve 2 racines réelles : $\pm\sqrt{5}$.

Réponse de l'**exercice 63** : Pour la première : $\ln x = -6$ ou 7
d'où $x = \mathrm{e}^{-6}$ ou e^{7}. Pour la seconde : $\ln^2 x = 7$, $x = \mathrm{e}^{\sqrt{7}}$ ou $x = \mathrm{e}^{-\sqrt{7}}$

Réponse de l'**exercice 64** : Le signe d'un produit est le même que celui d'un quotient ! Pour la deuxième question, la réponse est non, -5 convient dans un cas et pas dans l'autre.

Réponse de l'**exercice 65** :

$\left]-1, \frac{7}{2}\right[$ (1)	$]-\infty, -3[\cup]5, +\infty[$ (2)
$]-\infty, -\frac{1}{4}[\cup]1, +\infty[$ (3)	$[-9, 1]$ (4)
$x \leqslant -9-6\sqrt{2}$ ou $x \geqslant -9+6\sqrt{2}$ (5)	$]1, 7[$ (6)
$\{3\}$ (7)	$]-\infty, -1[$ (8)
$]-\infty, -3[\cup]0, +\infty[$ (9)	$]-\infty, 1[\cup]5/2, +\infty[$ (10)
$[1, 7]$ (11)	$\emptyset$ (12)

$]-\infty, -2[\cup]2/3, +\infty[$ (13)
Si $m \geqslant \frac{1}{2}$ alors on trouve $]-\infty, \frac{1}{2}] \cup [m, +\infty[$ pour l'équation (14) (autre cas analogue)

Réponse de l'**exercice 66** : $0, \frac{1}{4}, 0, 0, 0, 0, +\infty$

Réponse de l'**exercice 67** : -1 ; 0 ; -1 ; $\frac{1}{2}$; 2

Réponse de l'**exercice 68** : $0, 1, +\infty, 1, \frac{1}{2}, +\infty, \frac{1}{2}, 0$

Réponse de l'**exercice 69** :

$$x \mapsto -\frac{1}{x^2} \qquad x \mapsto -\frac{2}{x^3} \qquad x \mapsto -3\frac{1}{x^4} \qquad x \mapsto -4\frac{1}{x^5} \qquad \dots$$
$$x \mapsto \frac{1}{(x-1)^2} \qquad x \mapsto -\frac{2}{(x-1)^3} \qquad x \mapsto \frac{3}{(x-1)^4} \qquad x \mapsto -\frac{4}{(x-1)^5} \qquad \dots$$
$$x \mapsto -2\frac{1}{(2x+1)^2} \qquad x \mapsto -\frac{4}{(2x+1)^3} \qquad x \mapsto -\frac{6}{(2x+1)^4} \qquad x \mapsto -\frac{8}{(2x+1)^5} \qquad \dots$$

Réponse de l'**exercice 70** :

$f_1' : x \mapsto 3(x-1)^2$	$f_2' : x \mapsto 6x(x^2-1)^2$	$f_3' : x \mapsto 6(x-1)$
$f_4' : x \mapsto 2x-3$	$f_5' : x \mapsto \frac{2}{(x+3)^2}$	$f_6' : x \mapsto -\frac{5}{(2+x)^2}$
$f_7' : x \mapsto \frac{4}{(1-x)^2}$	$f_8' : x \mapsto 6x + \frac{1}{x^2}$	$f_9' : x \mapsto -3x^2+18x-26$
$g_1' : x \mapsto -3\frac{x^2-4x+1}{(x-2)^2}$	$g_2' : x \mapsto \frac{x^2-2x-1}{(x^2-x+2)^2}$	$g_3' : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2x-3}}$
$g_4' : x \mapsto \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+5}}$	$g_5' : x \mapsto \frac{x}{(x^2+1)}$	$g_6' : x \mapsto \frac{1}{(-x+2)^2}$
$g_7' : x \mapsto -2\sin(2x-\frac{\pi}{3})$	$g_8' : x \mapsto -2\cos(2x-\frac{\pi}{6})$	$g_9' : x \mapsto 2\cos 2x\cos x - \sin 2x \sin x$
$h_1' : x \mapsto -6\sin x(2\cos x - 1)$	$h_2' : x \mapsto \frac{-\sin^3 x}{(1+\cos^2 x)^2}$	$h_3' : x \mapsto 4\cos^2 x + \cos x - \sin x - 2$
$h_4' : x \mapsto \frac{x^2}{(x\sin x + \cos x)^2}$	$h_5' : x \mapsto \frac{5}{5x-1}$	$h_6' : x \mapsto \frac{2x}{x^2+1}$
$h_7' : x \mapsto \frac{2}{(x-1)(x+1)}$	$h_8' : x \mapsto \frac{1}{x\ln x}$	$h_9' : x \mapsto \frac{2}{2x-7}$
$u_1' : x \mapsto \ln x$	$u_2' : x \mapsto 3\mathrm{e}^{3x}$	$u_3' : x \mapsto (2x-1)\mathrm{e}^{x^2-x+1}$
$u_4' : x \mapsto \cos x \mathrm{e}^{\sin x}$	$u_5' : x \mapsto -2\frac{\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x-1)^2}$	$u_6' : x \mapsto (1+\ln x)\mathrm{e}^{x\ln x}$
$u_7' : x \mapsto \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}(1-\frac{1}{x})$	$u_8' : x \mapsto \frac{2\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^x+1}$	$u_9' : x \mapsto \frac{1+\mathrm{e}^{-x}+x\mathrm{e}^{-x}}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2}$
$v_1' : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2}$	$v_2' : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x-1}(x+1)^{\frac{3}{2}}}$	
$v_3' : x \mapsto \cos x \frac{1}{\sqrt{1+\sin x}(1-\sin x)^{3/2}}$	$v_4' : x \mapsto \frac{2}{\cos^2 2x}$	

Réponse de l'**exercice 71** : $x \mapsto \ln|x|$

Réponse de l'**exercice 72** :
A une constante additive près, on trouve :
$x \mapsto \frac{1}{17}x^{17} - \frac{5}{2}x^{14} + \frac{7}{6}x^{12} - \frac{1}{3}x^9 + 4x^5 + 14x^4 + 17x^3 + 9x^2 + x$

$f_1 : x \mapsto \ln\lvert x\rvert$	$f_2 : x \mapsto -\frac{1}{x}$	$f_3 : x \mapsto -\frac{1}{2}\frac{1}{x^2}$	$f_4 : x \mapsto -\frac{1}{3}\frac{1}{x^3}$
$g_1 : x \mapsto -\ln\lvert 1-x\rvert$	$g_2 : x \mapsto -\frac{1}{x-1}$	$g_3 : x \mapsto \frac{1}{2}\frac{1}{(x-1)^2}$	$g_4 : x \mapsto -\frac{1}{3}\frac{1}{(x-1)^3}$
$h_1 : x \mapsto \frac{1}{2}\ln\lvert 2x+1\rvert$	$h_2 : x \mapsto -\frac{1}{2}\frac{1}{2x+1}$	$h_3 : x \mapsto -\frac{1}{4}\frac{1}{(2x+1)^2}$	$h_4 : x \mapsto -\frac{1}{6}\frac{1}{(2x+1)^3}$

Réponse de l'**exercice 73** : A une constante additive près :

$a) x \mapsto \frac{4}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 - \frac{1}{x}$ $\quad b) x \mapsto \frac{1}{20}(2x^2+1)^5$ $\quad c) x \mapsto \frac{1}{4}(x-1)^4$

$e) x \mapsto \frac{1}{7}x^7 - \frac{3}{5}x^5 + x^3 - x$ $\quad f) x \mapsto -\frac{1}{x} - 2\sqrt{x}$ $\quad g) x \mapsto \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + x$

$h) x \mapsto -\frac{1}{2}\cos 2x$ $\quad i) x \mapsto \frac{1}{3}\sin 3x$ $\quad j) x \mapsto x - \tan x$

$k) x \mapsto \frac{1}{2}\ln|x^2+2x|$ $\quad l) x \mapsto \frac{1}{6}(x^2-1)^6$ $\quad m) x \mapsto -\frac{1}{2}\frac{1}{(x^2+2)}$

$n) x \mapsto \ln|x-3|$ $\quad o) x \mapsto -\frac{1}{x^2+x+3}$ $\quad p) x \mapsto \frac{1}{3}\ln|x^3-1|$

$q) x \mapsto \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}$ $\quad r) x \mapsto \frac{1}{5}\ln(5\mathrm{e}^x+1)$ $\quad s) x \mapsto \frac{3}{8}(1+\mathrm{e}^{2x})^{\frac{4}{3}}$

$t) x \mapsto -\ln|\cos x|$ $\quad u) x \mapsto \frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2}$ $\quad v) x \mapsto 2\mathrm{e}^{\sqrt{x}}$

$y) x \mapsto -\frac{2}{3}\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$ $\quad z) x \mapsto -2\sqrt{\mathrm{e}^x}$

$\alpha) x \mapsto \ln(1+\mathrm{e}^x)$ $\quad \beta) x \mapsto -\mathrm{e}^{\cos x}$ $\quad \gamma) x \mapsto -\frac{3}{2}\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}$

$\delta) x \mapsto -\frac{1}{\sqrt{1+2\mathrm{e}^x}}$ $\quad \varepsilon) x \mapsto \ln|\cos x + \sin x|$

Réponse de l'**exercice 74** :

$$I_1 = \ln 2 \qquad I_2 = \frac{1}{2}(1-\mathrm{e}^{-2}) \qquad I_3 = \frac{3}{2}\ln 10 \qquad I_4 = 2\ln\frac{63}{55} \qquad I_5 = 0$$